ОМСКАЯ ГОРОДСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ОмГТУ-2023 год

1.	Доказать, что точки экстремума функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ на промежутке $(0,+\infty)$ образуют возрастающую последовательность $\{x_n\}$ и вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n-x_n\right)\right)$.
	1) $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}\Rightarrow$ все критические точки удовлетворяют уравнению $x\cos x-\sin x=0$. Если x его решение, то $\cos x\neq 0$. Т.о. $x\cos x-\sin x=0$ равносильно $x-\operatorname{tg}x=0$. Функция $g(x)=x-\operatorname{tg}x$ не определена при $x=-\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\geq 1$ и убывает на любом интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, т.к. $g'(x)=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}<0$. Учитывая значения $g(x)$ на концах интервалов, $g(0)=0$, $g\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)=(-1)^n\cdot\infty$. Получаем, что $x\cos x-\sin x=0$ имеет по одному решению x_n в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$. 2) $f''(x)=\dfrac{-x^3\sin x-2x(x\cos x-\sin x)}{x^4}$ Т.к. x_n удовлетворяет $x\cos x-\sin x=0$, то $f''(x_n)=\dfrac{-\sin x_n}{x_n}\neq 0$. Т.е. все критические точки x_n - точки экстремума. 3) $x_n=\operatorname{tg}x_n=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n-\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n-x_n\right)\right)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n-x_n\right)$, Т.е. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n-x_n\right)=\dfrac{1}{x_n}$ Т.к. $x_n\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, то $x_n\to\infty,\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n-x_n\right)=\dfrac{1}{x_n}\to 0,\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n-x_n\to 0,\ \dfrac{n}{x_n}\to\dfrac{1}{\pi}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n-x_n\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{x_n}\right)=\dfrac{1}{\pi}$.

2.	Решить уравнение $\int\limits_{\ln 2}^{x}\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\frac{\pi}{6}$.
	$\int\limits_{\ln 2}^{x}\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\left\| \begin{array}{lll} e^t-1=y^2, & t=\ln 2\Rightarrow & y=1 \\ e^t dt=2ydy, & t=x\Rightarrow & y=\sqrt{e^x-1} \\ dt=\frac{2ydy}{y^2+1} & & \end{array} \right\|=\int\limits_{1}^{\sqrt{e^x-1}}\frac{2ydy}{y\left(y^2+1\right)}=$ $2\int\limits_{1}^{\sqrt{e^x-1}}\frac{dy}{y^2+1}=2arctg\left(y\right)\Big\|_{1}^{\sqrt{e^x-1}}=2arctg\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow$ $\Rightarrow arctg\left(\sqrt{e^x-1}\right)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\sqrt{e^x-1}=\sqrt{3}\Rightarrow x=\ln 4$
3.	На плоскости OXY расстояние отточки $M_0\left(x_0,y_0\right)$ до прямой L равно d. Точки пересечения прямой L с осями координат равноудалены от начала координат. Написать уравнение прямой L.
	Расстояние от точки $M_0\left(x_0,y_0\right)$ до прямой L равно $d\Leftrightarrow L$ - касательная к окружности $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=d^2$. Точки пересечения прямой L с осями координат равноудалены от начала координат $\Leftrightarrow L: x\pm y=c$. 1) $L: x+y=c\Rightarrow\vec{n}=\pm\left(\frac{d}{\sqrt{2}},\frac{d}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow$точки касания прямой и окружности $M\left(x_0+\frac{d}{\sqrt{2}},y_0+\frac{d}{\sqrt{2}}\right)$ или $M\left(x_0-\frac{d}{\sqrt{2}},y_0-\frac{d}{\sqrt{2}}\right)$. Тогда $L: x+y=2x_0\pm d\sqrt{2}$. 2) $L: x-y=c\Rightarrow$аналогично получим, точки касания прямой и окружности $M_1\left(x_0+\frac{d}{\sqrt{2}},y_0-\frac{d}{\sqrt{2}}\right)$ или $M_1\left(x_0-\frac{d}{\sqrt{2}},y_0+\frac{d}{\sqrt{2}}\right)$.и т.д. Т.о. $L: x-y=x_0-y_0\pm d\sqrt{2}$
4.	Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Найти радиус окружности если известно, что $BC=a$, $AD=b$, $\angle BMC=\alpha$.
	Обозначим $\angle BAC=x,\ \angle ABD=y,\ R-$искомый радиус. Т.к. $\alpha-$внешний угол $\triangle AMB$, то $x+y=\alpha$. По теореме синусов для $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$.

	$\begin{cases} a = 2R\sin x \\ b = 2R\sin(\alpha - x) \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \sin\alpha - \cos x \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{ctg} x = \frac{b + a\cos\alpha}{a\sin\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{a\sin\alpha} \Rightarrow$ $\Rightarrow R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$
5.	Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & \dots & 0 & n-2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}$
	$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$. При $n \ge 2$ разложим Δ_n по последней строке $\Delta_n = n \cdot \Delta_n + (-1)^{n+2} B_n$, где $B_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$. В B_n из всех столбцов вычтем последний. $\Delta_n = n \cdot \Delta_n + (-1)^{n+2} B_n = n \cdot \Delta_{n-1} + (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= n \cdot \Delta_{n-1} + (-1)^{n+2} (-1)^{n+1} (n-1)! = n \cdot \Delta_{n-1} - (n-1)!$ Положим $x_n = \frac{1}{n!} \cdot \Delta_n \Rightarrow x_1 = -1$, при $n \ge 2$ $x_n = x_{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow x_2 = -1 - \frac{1}{2},\ x_3 = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \dots,\ x_n = 1\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$. Ответ: $\Delta_n = -n! \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$
6.	Матрица A имеет размерность 3×2, а матрица B - 2×3. Найти определитель матрицы $A \cdot B$.

	Столбцы матрицы $A\cdot B$ получаются как линейные комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, задаваемыми строками матрицы B. Значит, эти столбца выражаются через два, поэтому они линейно зависимы и определитель матрицы равен 0.
7.	Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}$.
	Оценим числитель: $1+2^2+3^3+\ldots+n^n \le n^1+n^2+n^3+\ldots+n^n=\dfrac{n\left(n^n-1\right)}{n-1}<\dfrac{n\cdot n^n}{n-1}$ Значит, сама дробь находится между числами 1 и $\dfrac{n}{n-1}$ и по теореме о зажатой последовательности стремится к 1. Типичная ошибка: вычисление предела отдельно для слагаемых $\dfrac{k^k}{n^n}$, число которых меняется и стремится к бесконечности.
8.	Функция $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$ и дифференцируема на $(0,1)$. Доказать, что если $f(0)=f(1)=0$, то $f(x)=f'(x)$ в некоторой точке $x\in(0,1)$.
	Пусть $g(x)=f(x)\cdot e^{-x}$. Тогда $g'(x)=\left(f(x)-f'(x)\right)\cdot e^{-x}$. для функции $g(x)$ выполняются все условия теоремы Ролля: она непрерывна на отрезке $[0,1]$ и дифференцируема на $(0,1)$, причем $g(0)=g(1)=0$. Значит существует точка $c\in(0,1)$ такая, что $g'(x)=0$. но тогда и $f(c)-f'(c)=0$, ч.т.д.