**9 класс, 2023г.**

1. (14 *баллов*) Найти условия, при которых сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 18.
2. (14 *баллов*) Существует ли положительное натуральное число *a* такое, что сумма всех его цифр равняется 2023 и сумма всех цифр его квадрата равняется 20232?
3. (16 *баллов*) Найти значение выражения $\frac{x^{4}-6x^{3}-2x^{2}+18x+23}{x^{2}-8x+15}$ при $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}} $, не используя калькулятор.
4. (18 *баллов*) В выпуклом четырехугольнике ABCD угол BAD и угол BCD прямые. Луч AK делит угол BAD пополам. Точка Е является точкой пересечения луча AK и диагонали BD. Доказать, что если луч AK параллелен стороне BC, то отрезок АЕ меньше, чем половина стороны CD.
5. (18 *баллов*) Через центр тяжести треугольника ABC проведем линию, разбивающую его на две части. Доказать, что разница площадей этих двух частей не превосходит одной девятой площади треугольника.
6. (20 *баллов*) Найти решения системы:

$$\left\{\begin{array}{c}x+\left[y\right]+\left\{z\right\}=13,2\\\left[x\right]+\left\{y\right\}+z=14,3\\\left\{x\right\}+y+\left[z\right]=15,1\end{array}\right.$$

где $\left[x\right]$ – целая часть числа $x$, $\left\{x\right\}$ – дробная часть числа $x$, т.е. $x=\left[x\right]+\left\{x\right\}$.

1. **класс, 2022г.**
2. (16 *баллов*) Найти число пар $\left(x,y\right),$ где $x,y$ – положительные целые числа, такие, что $N=23x+92y$ является полным квадратом и $N\leq 2392$.
3. (16 *баллов*) Пусть $a,b,c,d>0$ и $\frac{1}{1+a^{4}}+\frac{1}{1+b^{4}}+\frac{1}{1+c^{4}}+\frac{1}{1+d^{4}}=1$. Доказать, что $abcd\geq 3$.
4. (16 *баллов*) Можно ли выбрать 2023 попарно различных неотрицательных целых числа, меньших, чем 100000, и таких, что никакие три из них не составляют арифметическую прогрессию?
5. (18 *баллов*) Через центр тяжести треугольника ABC проведем линию, разбивающую его на две части. Доказать, что разница площадей этих двух частей не превосходит одной девятой площади треугольника.
6. (16 *баллов*) Доказать, что ни одна из цифр 2,4,7,9 не может быть последней цифрой суммы $1+2+…+n$ для произвольного $n$.
7. (18 *баллов*) Какие правильные многоугольники могут быть получены (и как), обрезая куб плоскостью? Доказать, что других нет.
8. **класс, 2022г.**
9. (16 *баллов*) Можно ли выбрать 2023 попарно различных неотрицательных целых числа, меньших, чем 100000, и таких, что никакие три из них не составляют арифметическую прогрессию?
10. (16 *баллов*) Доказать, что ни одна из цифр 2,4,7,9 не может быть последней цифрой суммы $1^{3}+2^{3}+…+n^{3}$ для произвольного $n$.
11. (14 *баллов*) Через центр тяжести треугольника ABC проведем линию, разбивающую его на две части. Доказать, что разница площадей этих двух частей не превосходит одной девятой площади треугольника.
12. (14 *баллов*) Какие правильные многоугольники могут быть получены (и как), обрезая куб плоскостью? Доказать, что других нет.
13. (20 *баллов*) Найти максимальное положительное целое число $k$, такое, что число $N=\frac{1001∙1002∙…∙2023}{13^{k}}$ целое.
14. (20 *баллов*) Пусть задан многочлен $p\left(x\right)$ с действительными коэффициентами, такой, что $p\left(x\right)\geq 0$ для $∀x\in R$. Доказать, что многочлен $p\left(x\right)$ может быть представлен как сумма квадратов некоторых многочленов с действительными коэффициентами, т.е. $p\left(x\right)=f\_{1}\left(x\right)^{2}+f\_{2}\left(x\right)^{2}+…+f\_{n}\left(x\right)^{2} $.