**9 класс, 2024г.**

1. (14 *баллов*) Доказать, что уравнение $a^{2}+b^{2}-8c=6$ не имеет решений в целых числах.
2. (14 *баллов*) На улице Графовой имеется 8 домов. На левой стороне это дома 1, 2, 3, 4 и на правой стороне дома 5, 6, 7, 8. Почтальон начинает разносить почту из дома №1 и при этом починяется следующим правилам:

а) он обходит все дома по одному разу и возвращается в дом №1;

б) каждый раз он обязательно переходит через дорогу;

в) он не может сразу перейти к дому напротив.

Сколько различных маршрутов доставки почты существует?

1. (20 *баллов*) Даны два выпуклых четырехугольника $ABCD$ и $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ такие, что $AB=A^{'}B^{'}$, $BC=B^{'}C^{'}$ и т.д. Доказать, что если $∠A>∠A^{'}$ тогда $∠B<∠B^{'}$, $∠C>∠C^{'}$, $∠D<∠D^{'}$.
2. (18 *баллов*) Пусть $P\left(x\right)$ полином с рациональными коэффициентами. Докажите, что существует целое число *n* такое, что полином $Q\left(x\right)=P\left(x+n\right)-P\left(x\right)$ имеет только целые коэффициенты.
3. (18 *баллов*) Полоска бумаги разбита на 14 прямоугольников. Каждый из прямоугольников можно выкрасить в красный цвет или оставить белым, но окрашенные в красный цвет прямоугольники не могут соприкасаться. Сколько существует способов раскраски?
4. (16 *баллов*) Пусть $a,b,c$ положительные целые числа такие, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Доказать, что если НОД$\left(a,b,c\right)=1$ тогда $a+b$ – полный квадрат.
5. **класс, 2024г.**
6. (14 *баллов*) Доказать, что число $2025^{2024}$ не может быть представлено в виде суммы 27 квадратов нечетных чисел.
7. (14 *баллов*) На улице Графовой имеется 8 домов. На левой стороне это дома 1, 2, 3, 4 и на правой стороне дома 5, 6, 7, 8. Почтальон начинает разносить почту из дома №1 и при этом починяется следующим правилам:

а) он обходит все дома по одному разу и возвращается в дом №1;

б) каждый раз он обязательно переходит через дорогу;

в) он не может сразу перейти к дому напротив.

Сколько различных маршрутов доставки почты существует?

1. (20 *баллов*) Точки $A\_{1},B\_{1},C\_{1}$ лежат на сторонах $BC,CA,AB$ треугольника $ABC$ соответственно и линии $AA\_{1},BB\_{1},CC\_{1}$ пересекаются в точке $M$. Доказать, что если точка $M$ центр тяжести треугольника $A\_{1}B\_{1}C\_{1}$ то точка $M$ также центр тяжести треугольника $ABC$*.*
2. (18 *баллов*) Полоска бумаги разбита на 10 прямоугольников. Каждый из прямоугольников можно выкрасить либо в красный либо в зеленый цвет или оставить неокрашенным, но прямоугольники окрашенные в один цвет не могут соприкасаться. Сколько существует способов раскраски?
3. (16 *баллов*) Пусть $P\left(x\right)$ полином с рациональными коэффициентами. Докажите, что существует целое число *n* такое, что полином $Q\left(x\right)=P\left(x+n\right)-P\left(x\right)$ имеет только целые коэффициенты.
4. (18 *баллов*) Вычислить,

$$S=\sum\_{k=1}^{502}\left[\frac{305k}{503}\right]$$

где $\left[x\right]$ – означает целую часть числа $x$, то есть$ \left[x\right]$ – наибольшее целое число которое меньше либо равно $x$.

1. **класс, 2024г.**
2. (16 *баллов*) Пусть $N= 1^{n}+2^{n}+3^{n}+…+2024^{n}$. Найти количество натуральных чисел $n$ в интервале от 1 до 2024, таких, что число $N$ делится на 10.
3. (16 *баллов*) Множество чисел $\left\{1,2,3,…,49\right\} $разбито на три подмножества. Показать, что по крайней мере одно из них содержит три различных числа таких, что $a+b=c$.
4. (16 *баллов*) Докажите, что любая непрерывная кривая единичной длины может быть покрыта прямоугольником площадью равной $\frac{1}{4}$.
5. (16 *баллов*) Точки $A\_{1},B\_{1},C\_{1}$ лежат на сторонах $BC,CA,AB$ треугольника $ABC$ соответственно и линии $AA\_{1},BB\_{1},CC\_{1}$ пересекаются в точке $M$. Доказать, что если точка $M$ центр тяжести треугольника $A\_{1}B\_{1}C\_{1}$ то точка $M$ также центр тяжести треугольника $ABC$*.*
6. (20 *баллов*) Полоска бумаги разбита на 13 прямоугольников. Каждый из прямоугольников можно выкрасить в красный цвет или оставить белым, но окрашенные в красный цвет прямоугольники не могут соприкасаться. Склеим вместе первый и тринадцатый прямоугольники Сколько существует различных способов раскраски кольца?
7. (16 *баллов*) Вычислить,

$$S=\sum\_{k=1}^{2026}\left[\frac{2024k}{2027}\right]$$

где $\left[x\right]$ – означает целую часть числа $x$, то есть$ \left[x\right]$ – наибольшее целое число которое меньше либо равно $x$.